МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ

УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет _Прикладной математики и информатики__
Кафедра __Прикладной информатики и математики__

УТВЕРЖДЕН
на заседании кафедры __ПИиМ_____
«_29_»____08____2016 г., протокол №_1_
Заведующий кафедрой
_____
(подпись)

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Функциональный анализ

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
(код и наименование направления подготовки)

«Системный анализ, исследование операций и управление»
(наименование профиля подготовки)

бакалавр
Квалификация (степень) выпускника

Новороссийск
2018

Фонд оценочных средств предназначен для контроля знаний студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», направленность (профиль) «Системный анализ, исследование операций и управление» по дисциплине «Функциональный анализ»

Составители ____Дьяченко С.В.___

_____

«_29_»_____08_____2016 г.

Фонд оценочных средств обсужден на заседании кафедры информатики и математики
«_29_» ____08____ 2016 г. протокол № __1__

Заведующий кафедрой _____

Согласовано:

Председатель УМС филиала _____

«_29_» ____08_____ 2016 г.

Экспертиза проведена

1. Паспорт фонда оценочных средств

Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины «Функциональный анализ».

Фонд оценочных средств включает контрольные материалы для проведения текущего контроля в форме тестовых заданий, доклада-презентации по проблемным вопросам и промежуточной аттестации в форме вопросов к экзамену.

Перечень формируемых компетенций и этапы их формирования

Изучение дисциплины «Функциональный анализ» направлено на формирование следующих компетенций: ОПК-1, ПК-2

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	**уметь**	**владеть**
1.	ОПК-1	способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	- понятие информации; - основные положения теории информации и кодирования; - общую характеристику процессов сбора, передачи, обработки и накопления информации; - технические и программные средства реализации информационных процессов; - современное состояние и направления развития вычислительной техники и программных средств; - закономерности протекания информационных процессов в системах обработки	- работать в качестве пользователя персонального компьютера; - самостоятельно использовать внешние носители информации для обмена данными между машинами; - создавать резервные копии и архивы данных и программ; - работать с программными средствами общего назначения, соответствующими современным требованиям мирового рынка; - использовать информационные системы и средства вычислительной техники в	- навыками подготовки сложных иллюстрированных текстовых документов с использованием MS Word; - навыками решения расчетных экономических задач с применением MS Excel; - навыками создания и обработки реляционных баз данных средствами MS Access; - навыками подготовки электронных презентаций с использованием MS PowerPoint. - методами решения экономических задач с помощью

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	**уметь**	**владеть**
			информации; - принципы использования современных информационных технологий и инструментальных средств для решения различных задач в своей профессиональной деятельности; - основы защиты информации и сведений, составляющих государственную тайну; - методы обеспечения информационной безопасности экономического субъекта.	решении задач сбора, передачи, хранения и обработки экономической информации; - формулировать требования и принимать обоснованные решения по выбору аппаратно-программных средств для рационального решения задач, связанных с получением и преобразованием информации; - использовать в профессиональной деятельности сетевые средства поиска и обмена информацией.	специализированных программных продуктов; - навыками автоматизации решения экономических задач; - технологиями работы в локальных и глобальных информационных сетях; - приемами антивирусной защиты; - навыками работы с программами автоматизации бухгалтерского учета.
	ПК-2	способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	современный математический аппарат.	строго доказывать математические утверждения, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах; на основе анализа увидеть и корректно сформулировать математически точный результат; применять современный математический аппарат в исследовательск	навыками применения современного математического аппарата для решения стандартных математических задач. навыками применения современного математического аппарата для решения профессиональных задач

№ п.п.	Индекс компетенции	Содержание компетенции (или её части)	В результате изучения учебной дисциплины обучающиеся должны		
			знать	**уметь**	**владеть**
				ой и прикладной деятельности, изучать информационные системы методами математического прогнозирования и системного анализа, изучать большие системы современными методами высокопроизводительных вычислительных технологий, применение современных компьютеров в проводимых исследованиях.	

Этапы формирования компетенций

№ раздела, темы	**Раздел дисциплины, темы***	**Виды работ**		**Код компетенции**	**Конкретизация компетенций (знания, умения, навыки)**
		аудиторная	СР		
1	Введение	лекции	задачи	ОПК-1 ПК-2	основные теоретические понятия, осознавать их сущность и специфику, понимать, излагать и применять на практике содержание лекционного материала
2	Интеграл Лебега	семинар	задачи	ОПК-1 ПК-2	самостоятельно находить решение поставленных проблем, логически выстраивать обоснование основных фактов
3	Пространства Lp [a, b]	лекции	задачи	ОПК-1 ПК-2	методы функционального анализа для решения задач, возникающих в

					дисциплинах, использующих соответствующие методы, например при решении дифференциальных и интегральных уравнений
4	Пространство Lp[a,b] и тригонометрические ряды Фурье	семинар	задачи	ОПК-1 ПК-2	всесторонне анализировать и оценивать различные подходы к изложению теории и методов решения задач
5	Линейная и метрическая структура	лекции	задачи	ОПК-1 ПК-2	возможности применения современного инструментария дисциплины
6	Нормированные пространства	семинар	задачи	ОПК-1 ПК-2	уметь работать с учебной и научной литературой по предмету
7	Евклидовы пространства	лекции	задачи	ОПК-1 ПК-2	устанавливать взаимосвязи между содержанием курса функционального анализа и смежных математических дисциплин, уметь иллюстрировать новые абстрактные понятия с помощью типовых примеров
8	Линейные операторы и функционалы	семинар	задачи	ОПК-1 ПК-2	навыками анализа свойств основных математических объектов, применяемых в прикладных задачах; навыками решения задач вычислительного и теоретического характера в области функционального анализа,
9	Интегральные уравнения	лекции	задачи	ОПК-1 ПК-2	установлением взаимосвязей между вводимыми понятиями, навыками доказательства известных

					утверждений и собственных подходов к решению отдельных практических задач
10	Нелинейные операторы.	семинар	задачи	ОПК-1 ПК-2	самостоятельным поиском источников для углублённого изучения теоретических и прикладных разделов курса, вспомогательными техническими средствами решения задач

2. Показатели, критерии оценки компетенций и типовые контрольные задания

2.1 Структура фонда оценочных средств для текущей и промежуточной аттестации

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины*	Код контролируемой компетенции (или ее части)	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	Введение	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 1-5
2	Интеграл Лебега	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 6-10
3	Пространства Lp [a, b]	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 11-15
4	Пространство Lp[a,b] и тригонометрические ряды Фурье	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 16-20
5	Линейная и метрическая структура	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 21-25
6	Нормированные пространства	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 26-30
7	Евклидовы пространства	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 31-35
8	Линейные операторы и функционалы	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 36-40
9	Интегральные уравнения	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 41-45
10	Нелинейные операторы.	ОПК-1 ПК-2	контрольная	Вопрос на экзамене 46-49

2.2 Показатели, критерии и шкала оценки сформированных компетенций

Код и наименование компетенций	Соответствие уровней освоения компетенции планируемым результатам обучения и критериям их оценивания		
	пороговый	**базовый**	**продвинутый**
	Оценка		
	Удовлетворительно /зачтено	Хорошо/зачтено	Отлично /зачтено
ОПК-1 Способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	**Знать:** понятие информации; основные положения теории информации и кодирования; общую характеристику процессов сбора, передачи, обработки и накопления информации; технические и программные средства реализации информационных процессов.	**Знать:** современное состояние и направления развития вычислительной техники и программных средств; закономерности протекания информационных процессов в системах обработки информации. - основные факты, концепции и принципы математической статистики).	**Знать:** принципы использования современных информационных технологий и инструментальных средств для решения различных задач в своей профессиональной деятельности; основы защиты информации и сведений, составляющих государственную тайну; методы обеспечения информационной безопасности экономического субъекта.
	Уметь: – работать в качестве пользователя персонального компьютера; – самостоятельно использовать внешние носители информации для обмена данными между машинами; – создавать резервные копии и архивы данных и программ; - грамотно пользоваться языком теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой (математического	**Уметь:** – использовать информационные системы и средства вычислительной техники в решении задач сбора, передачи, хранения и обработки экономической информации; – использовать в профессиональной деятельности сетевые средства поиска и обмена информацией.	**Уметь:** – формулировать требования и принимать обоснованные решения по выбору аппаратно-программных средств для рационального решения задач, связанных с получением и преобразованием информации.

	анализа, алгебры и геометрии, информатики, физики, дискретной математики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики). – работать с программными средствами общего назначения, соответствующими современным требованиям мирового рынка.		
	Владеть: – навыками подготовки сложных иллюстрированных текстовых документов с использованием MS Word; – навыками решения расчетных экономических задач с применением MS Excel; навыками подготовки электронных презентаций с использованием MS PowerPoint.	**Владеть:** – навыками создания и обработки реляционных баз данных средствами MS Access; – технологиями работы в локальных и глобальных информационных сетях; – приемами антивирусной защиты; навыками работы с программами автоматизации бухгалтерского учета на уровне пользователя.	**Владеть:** – методами решения экономических задач с помощью специализированных программных продуктов; – навыками автоматизации решения экономических задач; – навыками работы с программами автоматизации бухгалтерского учета на уровне администратора. способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики (математического анализа, комплексного анализа, алгебры и геометрии, информатики, физики, дискретной математики, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики)для решения практических задач.

ПК-2 способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	**Знать:** современный математический аппарат.	**Знать:** современный математический аппарат.	**Знать:** современный математический аппарат.
	Уметь: строго доказывать математические утверждения, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах; на основе анализа увидеть и корректно сформулировать математически точный результат;	**Уметь:** строго доказывать математические утверждения, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах; на основе анализа увидеть и корректно сформулировать математически точный результат; применять современный математический аппарат в исследовательской и прикладной деятельности;	**Уметь:** строго доказывать математические утверждения, выделяя главные смысловые аспекты в доказательствах; на основе анализа увидеть и корректно сформулировать математически точный результат; применять современный математический аппарат в исследовательской и прикладной деятельности, изучать информационные системы методами математического прогнозирования и системного анализа, изучать большие системы современными методами высокопроизводительных вычислительных технологий, применение современных компьютеров в проводимых исследованиях.
	Владеть: навыками применения современного математического аппарата для решения стандартных математических задач.	**Владеть:** навыками применения современного математического аппарата для решения стандартных математических задач.	**Владеть:** навыками применения современного математического аппарата для решения стандартных математических задач. навыками применения современного математического аппарата для решения профессиональных задач

3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы:

3.1 Вопросы для устного опроса по теме «Функциональный анализ»

Вопросы в 5 семестре

1. Общая конструкция построения меры.
2. Мера Лебега на прямой.
3. Мера Лебега и мера Жордана.
4. Примеры множеств измеримых по Лебегу.
5. Свойства меры Лебега и множеств измеримых по Лебегу.
6. Измеримость по Лебегу неограниченных множеств.
7. Понятие почти всюду (п.в.). Эквивалентные функции. Существенно ограниченные функции.
8. Понятие измеримой функции. Примеры.
9. Свойства измеримых функций.
10. Измеримость непрерывных функций.
11. Теорема Лузина. Пример.
12. Интегральные суммы Лебега и Римана.
13. Интеграл Лебега для ограниченных функций. Нижняя и верхняя суммы Лебега.
14. Критерий существования интеграла Лебега.
15. Интеграл Лебега и интеграл Римана. Степенные функции.
16. Интеграл Лебега для неотрицательных функций. Вертикальные срезки.
17. Интеграл Лебега для произвольных функций. Абсолютная интегрируемость.
18. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (линейность по функции, аддитивность по множеству интегрирования).
19. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (равенство нулю и положительность).
20. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (неравенства).
21. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (абсолютная суммируемость).
22. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (достаточный признак суммируемости).
23. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема Лебега. Примеры.
24. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Свойства.
25. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Восстановление функции по производной, канторовы функции.
26. Пространства конечномерных векторов и пространства функций Lp.
27. Пространства Lp. Тождественность эквивалентных функций. Примеры.
28. Линейная структура и бесконечномерность пространства Lp. Степенная система. Тригонометрическая система.
29. Норма и метрическая структура в пространствах Lp.
30. Неравенства Гёльдера и Минковского.
31. Соотношения между пространствами Lp.
32. Сходимость в пространствах Lp. Примеры.
33. Свойства пределов и сходящихся последовательностей в Lp: единственность предела.
34. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в Lp: непрерывность линейных операций, нормы и расстояния.
35. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в Lp: ограниченность и сходимость.
36. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в Lp: поточечная сходимость и сходимость в Lp.
37. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в Lp, сходимость при разных p.
38. Полнота пространств Lp. Фундаментальные последовательности. Свойства (линейные операции, ограниченность).
39. Полнота пространств Lp. Фундаментальные последовательности. Свойства

(сходимость).
40. Полнота пространств Lp. Теорема Фишера.
41. Полнота пространств Lp. Сжимающиеся последовательности.
42. Ряды в пространствах Lp (сходимость, свойства, необходимый признак, признак Вейерштрасса).
43. Тригонометрические ряды в пространстве L (-п, п). Применение признака Вейерштрасса, теорема Рисса.
44. Плотность множеств в пространствах Lp. Основные понятия. Множество непрерывных функций в пространствах Lp. Полные системы функций и базисы.
45. Плотность множеств в пространствах Lp. Множество алгебраических многочленов и множество тригонометрических многочленов. Система многочленов Лежандра. Тригонометрическая система.
46. Пространство L2 (-п, п). Скалярное произведение и норма. Неравенство Коши.
47. Пространство L2 (-п, п).Ортогональность. Примеры. Проекция на конечную систему функций. Свойства. Тригонометрическая система. Ортогональность. Проекция на тригонометрическую систему.
48. Тригонометрический ряд Фурье для функции из L2 (-п, п). Коэффициенты Фурье. Экстремальность частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Сходимость тригонометрического ряда Фурье.
49. Тригонометрический базис в L2 (-п, п) и L2 (а, в). Разложение только по синусам или только по косинусам. Теорема Рисса-Фишера.

Вопросы в 6 семестре

1. Линейные пространства. Основные понятия: линейная независимость, размерность, изоморфизм.
2. Метрические пространства. Основные понятия: геометрия, топология, сходимость, изоморфизм.
3. Согласованность линейной и метрической структур в произвольном пространстве.
4. Нормированные пространства. Метрика. Согласованность линейной и метрической структур в нормированном пространстве.
5. Сходимость в нормированных пространствах. Свойства.
6. Основные примеры нормированных пространств.
7. Полные нормированные пространства. Основные понятия. Конечномерные пространства. Примеры.
8. Итерационные последовательности в полных нормированных пространствах.
9. Теоремы о пополнении и полном нормированном пространстве.
10. Ряды в нормированных пространствах. Признак Вейерштрасса.
11. Плотность множеств в нормированных пространствах. Сепарабельные пространства.
12. Полные линейные независимые системы. Базисы. Степенная система. Тригонометрическая система.
13. Компактность и предкомпактность в нормированных и банаховых пространствах. Примеры.
14. Непрерывные отображения. Теорема Вейерштрасса. Существование наилучшего приближения.
15. Полная ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Теорема Риса.
16. Предкомпактность в конкретных бесконечномерных пространствах.
17. Евклидовы пространства. Нормируемость. Неравенства Коши. Свойства скалярного произведения.
18. Ортогональность в евклидовых пространствах. Ортогонализация линейно независимой системы в евклидовом пространстве. Полиномы Лежандра.
19. Ряды Фурье в евклидовом пространстве. Коэффициенты Фурье. Сходимость ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

20. Коэффициенты Фурье. Сходимость ряда Фурье к данному элементу.
21. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
22. Теорема Рисса-Фишера в гильбертовом пространстве.
23. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
24. Разложение гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств. Следствия.
25. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах.
26. Линейные операторы и функционалы. Непрерывность и ограниченность. Норма.
27. Линейные операторы в конечномерных пространствах.
28. Интегральный оператор
29. Пространство линейных ограниченных операторов. Ряды операторов.
30. Сопряжённое пространство. Его представление. Примеры.
31. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
32. Продолжение линейных ограниченных операторов. Продолжение по непрерывности. Теорема Хана-Банаха. Следствия.
33. Обратный оператор. Непрерывная обратимость. Её условия. Теорема Банаха об обратном операторе.
34. Обратный оператор. Обратимость оператора близкого к единичному. Обратимость оператора близкого к обратимому.
35. Спектр и резольвента, их свойства. Примеры.
36. Компактные операторы. Конечномерные операторы. Единичный оператор в бесконечномерном пространстве. Обратимость компактного оператора.
37. Замкнутость множества компактных операторов в множестве ограниченных операторов.
38. Интегральный оператор.
39. Спектр компактного оператора. Нулевая точка. Собственные числа и собственные вектора.
40. Теорема Фредгольма. Пример оператора заданного диагональной матрицей.
41. Сопряжённые операторы. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Самосопряжённые операторы. Проекторы. Свойства. Примеры.
42. Спектр самосопряжённого оператора. Примеры.
43. Спектр компактного самосопряжённого оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.
44. Интегральные уравнения Фредгольма. Уравнения 2-го рода. Теоремы Фредгольма.
45. Альтернатива Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтера.
46. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Разложение в ряд. Уравнения с симметричным ядром. Уравнения с вырожденным ядром.
47. Интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода.
48. Нелинейные операторы. Примеры. Непрерывность и условия Липшица.
49. Сжимающие операторы. Неподвижные точки. Метод последовательных приближений. Принцип сжимающих операторов.
50. Сжимающие операторы. Следствия и применения принципа сжимающих операторов (интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода).
51. Неподвижные точки произвольных операторов. Теорема Брауэра. Теорема Шаудера.
52. Дифференцируемые операторы. Производная Фреше. Примеры, свойства (формула конечных приращений, условия сжатия).
53. Дифференцируемые операторы. Теорема о локальном обращении дифференцируемого оператора (приближённый обратный оператор). Итерационный метод Ньютона.

Перечень части компетенции, проверяемых оценочным средством: ОПК-1, ПК-2

3.2 Экзаменационные материалы для промежуточной аттестации (экзамен)

Вопросы для подготовки к экзамену

Вопросы к экзамену в 5 семестре

1. Общая конструкция построения меры.
2. Мера Лебега на прямой.
3. Мера Лебега и мера Жордана.
4. Примеры множеств измеримых по Лебегу.
5. Свойства меры Лебега и множеств измеримых по Лебегу.
6. Измеримость по Лебегу неограниченных множеств.
7. Понятие почти всюду (п.в.). Эквивалентные функции. Существенно ограниченные функции.
8. Понятие измеримой функции. Примеры.
9. Свойства измеримых функций.
10. Измеримость непрерывных функций.
11. Теорема Лузина. Пример.
12. Интегральные суммы Лебега и Римана.
13. Интеграл Лебега для ограниченных функций. Нижняя и верхняя суммы Лебега.
14. Критерий существования интеграла Лебега.
15. Интеграл Лебега и интеграл Римана. Степенные функции.
16. Интеграл Лебега для неотрицательных функций. Вертикальные срезки.
17. Интеграл Лебега для произвольных функций. Абсолютная интегрируемость.
18. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (линейность по функции, аддитивность по множеству интегрирования).
19. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (равенство нулю и положительность).
20. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (неравенства).
21. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (абсолютная суммируемость).
22. Свойства интеграла Лебега и суммируемых функций (достаточный признак суммируемости).
23. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема Лебега. Примеры.
24. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Свойства.
25. Интеграл Лебега с переменным верхним пределом. Восстановление функции по производной, канторовы функции.
26. Пространства конечномерных векторов и пространства функций Lp.
27. Пространства Lp. Тождественность эквивалентных функций. Примеры.
28. Линейная структура и бесконечномерность пространства Lp. Степенная система. Тригонометрическая система.
29. Норма и метрическая структура в пространствах Lp.
30. Неравенства Гёльдера и Минковского.
31. Соотношения между пространствами Lp.
32. Сходимость в пространствах Lp. Примеры.
33. Свойства пределов и сходящихся последовательностей в Lp: единственность предела.
34. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в Lp: непрерывность линейных операций, нормы и расстояния.
35. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в Lp: ограниченность и сходимость.
36. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в Lp: поточечная сходимость и сходимость в Lp.
37. Свойства пределов и последовательностей, сходящихся в Lp, сходимость при разных p.

38. Полнота пространств Lp. Фундаментальные последовательности. Свойства (линейные операции, ограниченность).
39. Полнота пространств Lp. Фундаментальные последовательности. Свойства (сходимость).
40. Полнота пространств Lp. Теорема Фишера.
41. Полнота пространств Lp. Сжимающиеся последовательности.
42. Ряды в пространствах Lp (сходимость, свойства, необходимый признак, признак Вейерштрасса).
43. Тригонометрические ряды в пространстве L (-п, п). Применение признака Вейерштрасса, теорема Рисса.
44. Плотность множеств в пространствах Lp. Основные понятия. Множество непрерывных функций в пространствах Lp. Полные системы функций и базисы.
45. Плотность множеств в пространствах Lp. Множество алгебраических многочленов и множество тригонометрических многочленов. Система многочленов Лежандра. Тригонометрическая система.
46. Пространство L2 (-п, п). Скалярное произведение и норма. Неравенство Коши.
47. Пространство L2 (-п, п).Ортогональность. Примеры. Проекция на конечную систему функций. Свойства. Тригонометрическая система. Ортогональность. Проекция на тригонометрическую систему.
48. Тригонометрический ряд Фурье для функции из L2 (-п, п). Коэффициенты Фурье. Экстремальность частичных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Сходимость тригонометрического ряда Фурье.
49. Тригонометрический базис в L2 (-п, п) и L2 (а, в). Разложение только по синусам или только по косинусам. Теорема Рисса-Фишера.

Вопросы к экзамену в 6 семестре

1. Линейные пространства. Основные понятия: линейная независимость, размерность, изоморфизм.
2. Метрические пространства. Основные понятия: геометрия, топология, сходимость, изоморфизм.
3. Согласованность линейной и метрической структур в произвольном пространстве.
4. Нормированные пространства. Метрика. Согласованность линейной и метрической структур в нормированном пространстве.
5. Сходимость в нормированных пространствах. Свойства.
6. Основные примеры нормированных пространств.
7. Полные нормированные пространства. Основные понятия. Конечномерные пространства. Примеры.
8. Итерационные последовательности в полных нормированных пространствах.
9. Теоремы о пополнении и полном нормированном пространстве.
10. Ряды в нормированных пространствах. Признак Вейерштрасса.
11. Плотность множеств в нормированных пространствах. Сепарабельные пространства.
12. Полные линейные независимые системы. Базисы. Степенная система. Тригонометрическая система.
13. Компактность и предкомпактность в нормированных и банаховых пространствах. Примеры.
14. Непрерывные отображения. Теорема Вейерштрасса. Существование наилучшего приближения.
15. Полная ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Теорема Риса.
16. Предкомпактность в конкретных бесконечномерных пространствах.
17. Евклидовы пространства. Нормируемость. Неравенства Коши. Свойства скалярного произведения.

18. Ортогональность в евклидовых пространствах. Ортогонализация линейно независимой системы в евклидовом пространстве. Полиномы Лежандра.
19. Ряды Фурье в евклидовом пространстве. Коэффициенты Фурье. Сходимость ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
20. Коэффициенты Фурье. Сходимость ряда Фурье к данному элементу.
21. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве.
22. Теорема Рисса-Фишера в гильбертовом пространстве.
23. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.
24. Разложение гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств. Следствия.
25. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах.
26. Линейные операторы и функционалы. Непрерывность и ограниченность. Норма.
27. Линейные операторы в конечномерных пространствах.
28. Интегральный оператор
29. Пространство линейных ограниченных операторов. Ряды лператоров.
30. Сопряжённое пространство. Его представление. Примеры.
31. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.
32. Продолжение линейных ограниченных операторов. Продолжение по непрерывности. Теорема Хана-Банаха. Следствия.
33. Обратный оператор. Непрерывная обратимость. Её условия. Теорема Банаха об обратном операторе.
34. Обратный оператор. Обратимость оператора близкого к единичному. Обратимость оператора близкого к обратимому.
35. Спектр и резольвента, их свойства. Примеры.
36. Компактные операторы. Конечномерные операторы. Единичный оператор в бесконечномерном пространстве. Обратимость компактного оператора.
37. Замкнутость множества компактных операторов в множестве ограниченных операторов.
38. Интегральный оператор.
39. Спектр компактного оператора. Нулевая точка. Собственные числа и собственные вектора.
40. Теорема Фредгольма. Пример оператора заданного диагональной матрицей.
41. Сопряжённые операторы. Сопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Самосопряжённые операторы. Проекторы. Свойства. Примеры.
42. Спектр самосопряжённого оператора. Примеры.
43. Спектр компактного самосопряжённого оператора. Теорема Гильберта-Шмидта.
44. Интегральные уравнения Фредгольма. Уравнения 2-го рода. Теоремы Фредгольма.
45. Альтернатива Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтера.
46. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Разложение в ряд. Уравнения с симметричным ядром. Уравнения с вырожденным ядром.
47. Интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода.
48. Нелинейные операторы. Примеры. Непрерывность и условия Липшица.
49. Сжимающие операторы. Неподвижные точки. Метод последовательных приближений. Принцип сжимающих операторов.
50. Сжимающие операторы. Следствия и применения принципа сжимающих операторов (интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода).
51. Неподвижные точки произвольных операторов. Теорема Брауэра. Теорема Шаудера.
52. Дифференцируемые операторы. Производная Фреше. Примеры, свойства (формула конечных приращений, условия сжатия).

53. Дифференцируемые операторы. Теорема о локальном обращении д ифференцируемого оператора (приближённый обратный оператор). Итерационный метод Ньютона.

Перечень компетенций, проверяемых оценочным средством: ОПК-1, ПК-2

Примерные варианты заданий для контрольных работ.

ВАРИАНТ 1

1. Равномерная и поточечная сходимости последовательностей операторов. Критерий поточечной сходимости.

2. Пусть A - ограниченный оператор и x^n - последовательность элементов, для которых $||x^n||=1$ и $||(A-aI)x^n|| \to 0$. Доказать, что a - точка спектра.

3. Доказать, что оператор $(Ax)(t)= \int_0^t x(s)ds + x(t)$ обратим в пространстве C[0,1] и найти его обратный оператор.

ВАРИАНТ 2

1. Теорема об обратимости оператора, близкого к единичному оператору.

2. Пусть C(I) -пространство непрерывных функций на множестве I=[1,2] U [3,4] и (Af)(x)=xf(x). Найти спектр оператора A. Определить характер спектра.

3. Является ли пространство C[0,1] полным?

ВАРИАНТ 3

1. Критерий относительной компактности Хаусдорфа.

2.Привести пример оператора, не имеющего точечного спектра.

3. Пусть $A(x_1, x_2,\dots x_n,\dots)= (a_1x_1, \dots a_nx_n,\dots)$. Найти необходимые и достаточные условия ограниченности оператора A в пространстве l_2.

ВАРИАНТ 4

1. Теорема о существовании ортонормированного базиса
2. Пусть $A:X \to Y$ - ограниченный оператор и Im A - конечномерное подпространство в Y. Показать, что из любой последовательности Ax^n, $\|x^n\|=1$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.
3. Доказать, что уравнение $2x(t) - \sin(x(t)) = 1$ имеет единственное решение в пространстве $C[0,1]$.

4 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

4.1. Методические указания по подготовке к практическим занятиям

Работа над темами дисциплины предполагает следующие этапы:

- первоначально необходимо прочесть конспект лекции по теме, предложенный в рабочей программе, затем перейти к аналогичной теме в методических указаниях по подготовке к практическим занятиям;
- изучив план практического занятия, последовательность рассматриваемых в нем вопросов, необходимо ознакомиться с сущностью каждого из них, используя конспекты лекций, а также материалы из рекомендуемой основной и дополнительной учебной литературы;
- рассмотрение вопросов темы необходимо сопровождать изучением определений основных понятий, необходимых для осмысления материала;
- для более глубокого понимания студенты должны ответить на предложенные вопросы для самоконтроля и выполнить задания в виде тестов, ситуаций для анализа, решения задач, упражнений и написания эссе по предлагаемым проблемам.

4.2. Методические рекомендации, определяющие процедуры оценивания на экзамене

Итоговой формой контроля сформированности компетенций у обучающихся по дисциплине является экзамен. Студенты обязаны сдать экзамен в соответствии с расписанием и учебным планом

ФОС промежуточной аттестации состоит из вопросов и задач к экзамену по дисциплине.

Экзамен по дисциплине преследует цель оценить работу студента за курс, получение теоретических знаний, их прочность, развитие творческого мышления, приобретение навыков самостоятельной работы, умение применять полученные знания для решения практических задач.

Форма проведения экзамена: устно (письменно).

Экзаменатору предоставляется право задавать студентам дополнительные вопросы по всей учебной программе дисциплины.

Результат сдачи экзамена заноситься преподавателем в экзаменационную ведомость и зачетную книжку.

Критерии оценки:

оценка «отлично»: глубокие исчерпывающие знания всего программного материала, логически последовательные, полные, грамматически правильные и конкретные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы членов комиссии; использование в необходимой мере в ответах языкового материала, представленного в рекомендуемых учебных пособиях и дополнительной литературе.;

оценка «хорошо»: твёрдые и достаточно полные знания всего программного материала, последовательные, правильные, конкретные ответы на поставленные вопросы при свободном реагировании на замечания по отдельным вопросам;

оценка «удовлетворительно»: знание и понимание основных вопросов программы, наличие ошибок при недостаточной способности их корректировки, наличие определенного количества (не более 50%) ошибок в освещении отдельных вопросов билета;

оценка «неудовлетворительно»: непонимание сущности излагаемых вопросов, грубые ошибки в ответе, неуверенные и неточные ответы на дополнительные вопросы экзаменаторов.